ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN XUÂN LAI

VỀ SỰ XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA ĐA THỨC VI PHÂN ĐỐI VỚI HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN XUÂN LAI

VỀ SỰ XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CỦA ĐA THỨC VI PHÂN ĐỐI VỚI HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 9 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. Vũ Hoài An

2. GS.TSKH. Hà Huy Khoái

THÁI NGUYÊN - NĂM 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH Hà Huy Khoái và TS Vũ Hoài An. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Thái Nguyên, tháng 2 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Xuân Lai

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Hà Huy Khoái và TS Vũ Hoài An. Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các thầy.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Đào tạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên và các Phòng Ban chức năng, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng toàn thể giảng viên trong khoa, Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Cao đẳng Hải Dương, các giảng viên trong Khoa Giáo dục Tiểu học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu luận án.

Tác giả xin chân thành cám ơn PGS.TSKH Trần Văn Tấn, PGS.TSKH Tạ Thị Hoài An là hai cán bộ phản biện cùng các nhà khoa học trong Hội đồng đánh giá luận án cấp cơ sở đã đọc và góp ý, sửa chữa luận án được hoàn thiện tốt hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, bạn bè trong các Seminar tại Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng Trường Đại học Sư phạm -ĐHTN, Trường Đại học Thăng Long và Trường Cao đẳng Hải Dương đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả bày tỏ lòng biết ơn tới những người thân trong gia đình bố, mẹ, vợ cùng hai con trai những người đã chịu nhiều vất vả và dành hết tình cảm yêu thương, động viên, chia sẻ, để tác giả hoàn thành được luận án.

Tác giả
Nguyễn Xuân Lai

Mục lục

Bảng ký hiệu

$URSE$: Tập xác định duy nhất đối với hàm nguyên.
$URSM$: Tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình.
$E_f(S)$: Nghịch ảnh của tập S qua hàm f tính bội
$E_{f,m)}(S)$: Nghịch ảnh của tập S qua hàm f tính bội chặn bởi m.
$E_f(1)$: Nghịch ảnh của 1 qua hàm f tính bội.
$\overline{E}_f(1)$: Nghịch ảnh của 1 qua hàm f không tính bội.
$\overline{E}_f(S)$: Nghịch ảnh của tập S qua hàm f không tính bội.
$\#(S)$: Là lực lượng của tập S.
CM : Tính cả bội.
IM : Không tính bội.
UPM : Đa thức duy nhất
$SUPM$: Đa thức duy nhất mạnh.
$\mathcal{M}(\mathbb{C})$: Trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.
$\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: Là không gian xạ ảnh n chiều trên $\mathbb{K}$.

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Phân bố giá trị của hàm phân hình là một trong những bài toán trung tâm của giải tích phức. Trong lĩnh vực đó, những kết quả về phân bố giá trị của hàm và đạo hàm có vai trò quan trọng. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, ông đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman [42] *Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng.*

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie J. [17] kiểm tra đối với $n = 1$. Hayman đã đặt ra câu hỏi tương tự cho hàm phân hình. Giả thuyết này có mối liên hệ giữa phân bố giá trị của hàm phân hình và đạo hàm của nó. Vấn đề trên thu hút sự chú ý của nhiều nhà toán học, và được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Năm 2006, Giả thuyết Hayman đã được Nevo X.C. - Pang Sh. - Zalcman L. [51] giải quyết cho hàm phân hình.

Liên quan đến Giả thuyết Hayman là vấn đề nhận giá trị của đa thức vi phân. Chú ý rằng, $f^n f' = \dfrac{1}{n+1}(f^{n+1})'$. Khi đó, Giả thuyết Hayman làm nảy sinh vấn đề nhận giá trị của đạo hàm bậc cao của hàm nguyên, hàm phân hình ([30], [31]).

Hennekemper W. [44], Chen H.H. [16] và Wang Y.F.([65], [66]) đã chứng minh định lí sau:

Định lí A.*Cho f là hàm nguyên siêu việt trên $\mathbb{C}$ và n, k là các số nguyên dương với $n \geq k+1$. Khi đó $(f^n)^{(k)}$ nhận giá trị phức khác 0 bất kì vô hạn lần.*

Năm 2007, Bhoosnurmath S.S.-Dyavanal R.S. [14] đã đưa ra định lí sau đây:

Định lí B [14]. *Cho f là hàm phân hình siêu việt trên $\mathbb{C}$ và n, k là các* *số nguyên dương với* $n \geq k+3$. *Khi đó* $(f^n)^{(k)}$ *nhận giá trị phức khác* 0 *bất kì vô hạn lần.*

Vào những thập niên đầu của thế kỷ XX, Nevanlinna đã giải quyết vấn đề phân bố giá trị của hàm phân hình thông qua lý thuyết phân bố giá trị được ông xây dựng. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị là vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng qua điều kiện ảnh ngược của ít nhất 5 điểm phân biệt (4 điểm) mà được gọi là Định lý 5 điểm (Định lý 4 điểm) của Nevanlinna. Và ta nói là vấn đề duy nhất kiểu thứ nhất.

Năm 1977, Gross F. đưa ra một ý tưởng mới là xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ông đưa ra hai câu hỏi sau:

i) Tồn tại hay không tập S của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ ta có $f = g$?

ii) Tồn tại hay không hai tập S_i, $i = 1, 2$ của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ để với bất kỳ các hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S_i) = E_g(S_i)$, $i = 1, 2$ ta có $f = g$?

Ta nói vấn đề xác định duy nhất theo ý tưởng của Gross F. là vấn đề duy nhất kiểu thứ hai. Nhiều tác giả đã nghiên cứu vấn đề này dựa trên hai hướng chính:

Hướng thứ nhất là tìm các tập xác định duy nhất với số phần tử bé nhất có thể có.

Hướng thứ hai là tìm các đặc trưng của tập xác định duy nhất.

Năm 1982 Gross F. và Yang C.C. chứng tỏ tập $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z + e^z = 0\}$ là tập $URSE$; gần đây $URSE$ và $URSM$ với hữu hạn phần tử được tìm thấy bởi Yi H.X. [63], Li P. và Yang C.C. [49], Mues E. và Reinders M.[50], Frank G. và Reinders M. [23], Fujimoto H.[24].

Theo hướng thứ nhất thì Yi H.X. đã dùng các ước lượng hàm Nevanlinna để chứng minh tập $S_Y = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n + az^m + b = 0\}$ với các điều kiện khác nhau của n, m, a, b là URS. Năm 1998, Frank G. và Reinders M. [23] đã chứng minh định lí sau:

Định lí C. *Với mọi số nguyên* $n \geq 11, c \neq 0, c \neq 1$ *tập hợp*

$$S_{FR} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{(n-1)(n-2)}{2} z^n - n(n-2) z^{n-1} + \frac{n(n-2)}{2} z^{n-2} + c = 0 \right\}$$

là URS cho các hàm phân hình.

Năm 2000, Fujimoto H.[24] đã tổng quát hóa Định lí C như sau:
Giả sử $P_F(z)$ là đa thức bậc q không có nghiệm bội với tập nghiệm là S_F. Ta viết

$$P_F^{'} = q(z-d_1)^{q_1}...(z-d_k)^{q_k},$$

với k là chỉ số đạo hàm của $P(z)$ và $q_1 + ... + q_k = q - 1$.
Đa thức khác không $P(z)$ được gọi là thỏa mãn điều kiện (H) nếu $P(d_l) \neq P(d_m)$, với mọi $1 \leq l < m \leq k$.
Đa thức khác không $P(z)$ được gọi là thỏa mãn điều kiện (G) nếu $P(d_1) + ... + P(d_k) \neq 0$.
Định lí D. *Giả sử hoặc $k \geq 3$ hoặc $k = 2$ và $\min(q_1, q_2) \geq 2$ và $P_F(z)$ là đa thức duy nhất mạnh bậc q thỏa mãn điều kiện (H) ở trên*
(i) Nếu $q \geq 2k+6$ thì S_F là tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình.
(ii) Nếu $q \geq 2k + 12$ thì S_F là tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình không tính bội.
(iii) Nếu $q \geq 2k + 2$ thì S_F là tập xác định duy nhất cho các hàm nguyên.
(iv) Nếu $q \geq 2k + 5$ thì S_F là tập xác định duy nhất cho các hàm nguyên không tính bội.
Năm 2009, Bai X., Han Q. và Chen A.[8] đã cải tiến kết quả của Fujimoto H.[24]. Năm 1995, Li P. và Yang C.C. [49] đã đưa ra ký hiệu

$$\lambda_M = \inf\left\{\#(S)|S \text{ là } URSM\right\}, \quad \lambda_E = \inf\left\{\#(S)|S \text{ là } URSE\right\}.$$

Ở đó $\#(S)$ là lực lượng của tập S.
Và hai ông đã đưa ra giả thuyết $\lambda_M = 6, \lambda_E = 4$. Hà Huy Khoái [36] đưa ra giả thuyết rằng $\lambda_M = 7$. Cho đến nay số phần tử ít nhất của $URSM$ đã được thiết lập là 11. Các phương pháp được dùng trong các bài báo đó bao gồm các đánh giá của hàm đặc trưng Nevanlinna. Cũng trong [23] các tác giả đã chú ý rằng theo phương pháp của họ không nhận được $URSM$ với số phần tử bé hơn 11.
Từ đó, vấn đề xác định duy nhất theo hai kiểu nói trên đã được mở rộng, nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với kết quả của Fujimoto H., Shirosaki M., Ru M., Yi H.X., Hu P.C.-Yang C.C., Hà Huy Khoái, Đỗ Đức Thái, Trần Văn Tấn, Tạ Thị Hoài An, Sĩ Đức Quang, Escassut A., Phạm Việt Đức, Hà Trần Phương, Gross F. và Yang C.C, Yi H.X., Shiffman B., Yang C.C.-Hua X.H., Mues E.- Reinders M., Li P., Wang.J.T-Y,Wong.P-M., ...

Đối với đạo hàm của hàm phân hình, Giả thuyết Hayman và vấn đề nhận giá trị của đa thức vi phân đã nảy sinh vấn đề xác định duy nhất. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Fang M.L. và Hua X.H. [21], Yang C.C. và Hua X.H.[58]. Họ đã chứng minh định lí sau:

Định lí E([21], [58]). *Cho* f, g *là hai hàm nguyên khác hằng trên* $\mathbb{C}$ *và* $n \geq 6$ *là số nguyên dương. Nếu* $f^n f^{'}$ *và* $g^n g^{'}$ *nhận* $1CM$ *thì hoặc* $f = c_1 e^{cz}, g = c_2 e^{-cz}$, *ở đó* c_1, c_2 *và* c *là ba hằng số thỏa mãn* $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -1$ *hoặc* $f = tg$, *với* t *là hằng số sao cho* $t^{n+1} = 1$.

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển với những kết quả sâu sắc của Lahiri I., Han Q. – Yi X.H., Bergweiler W., Langley J.K., Liu K., Yang L.Z., Hong L.C., Fang M.L., Li B.Q., Hu P.C. - Yang C.C., Eremenko A., Frank G. - Hua X.H. – Vaillancourt R., Bhoosnurmath S.S. – Dyavanal R.S, Yang C.C. -Hua X.H., . . .

Chú ý rằng mỗi định lí nhận giá trị của hàm sẽ nhận được một định lí duy nhất. Chẳng hạn, hai định lí sau đây lần lượt là các định lí tương ứng với Định lí A, Định lí B.

Định lí F [22]. *Cho* f, g *là hai hàm nguyên khác hằng trên* $\mathbb{C}$ *và* n, k *là các số nguyên dương với* $n > 2k + 4$. *Nếu* $(f^n)^{(k)}$ *và* $(g^n)^{(k)}$ *nhận* $1CM$ *thì hoặc* $f = c_1e^{cz}, g = c_2e^{-cz}$, *ở đó* c_1, c_2 *và* c *là ba hằng số thỏa mãn* $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$ *hoặc* $f = tg$, *với* t *là hằng số sao cho* $t^n = 1$.

Định lí G [14]. *Cho* f, g *là hai hàm phân hình khác hằng trên* $\mathbb{C}$ *và* n, k *là các số nguyên dương với* $n > 3k + 8$. *Nếu* $(f^n)^{(k)}$ *và* $(g^n)^{(k)}$ *nhận* $1CM$ *thì hoặc* $f = c_1e^{cz}, g = c_2e^{-cz}$, *ở đó* c_1, c_2 *và* c *là ba hằng số thỏa mãn* $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$ *hoặc* $f = tg$, *với* t *là hằng số sao cho* $t^n = 1$.

Trong những năm gần đây, Giả thuyết Hayman được đặt ra cho các hàm phân hình p-adic. Năm 2008, Ojeda J.[54] đã nhận được kết quả sau:

Định lí H [54]. *Cho* f *là hàm phân hình trên* $\mathbb{K}$, $n > 2$ *là một số nguyên và* $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. *Khi đó nếu* $f^n(z) f^{'}(z) \neq a$ *với mọi* $z \in \mathbb{K}$ *thì* f *là hằng.*

Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [30] đã tổng quát hóa kết quả của Ojeda J.[54] cho đa thức vi phân kiểu $f^n((f)^{(k)})^m$. Vũ Hoài An- Lê Thị Hoài Thu [5] đã xét vấn đề này trong trường hợp p-adic nhiều biến.

Năm 2014, Escassut A. và Ojeda J. [19] đã xem xét Định lí H trong trường hợp $n = 2$.

Gần đây, Boussaf K. - Escassut A. – Ojeda J.[13] đã bắt đầu nghiên cứu